La méthode de Hörner

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Article

par
Stéphane PASQUET

1^er^ septembre 2018

Introduction

Considérons un polynôme P, dont une racine est égale à a.
La méthode de HÖRNER va nous permettre de trouver les coefficients du polynôme Q tel que :

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

Bien entendu, il existe d'autres méthodes, comme la *division euclidienne de polynômes* ou encore la *méthode des coefficients indéterminés*, mais nous allons voir que la méthode de HÖRNER a deux avantages sur les autres : sa rapidité et le fait que l'on puisse la programmer aisément.

Un exemple simple

Considérons le polynôme :

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x - 12$$

dont une racine évidente est $a = 2$.
Nous allons réfléchir à une méthode qui nous permet de trouver les coefficients de $Q(x)$, tel que $P(x) = (x - 2)Q(x)$, à l'aide d'une division euclidienne.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & +7x^2 & -4x & -12 & x-2 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +2x^3 & & & & x^3-1x^2+5x+6 \\ \cline{1-2}
 & -1x^3 & +7x^2 & -4x & -12 & \\
 & +x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 5x^2 & -4x & -12 & \\
 & & -5x^2 & +10x & & \\ \cline{3-4}
 & & & 6x & -12 & \\
 & & & -6x & +12 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

On peut alors remarquer que :

- $-1 = -3 + 2 \times 2$
- $5 = 7 + 2 \times (-1)$
- $6 = -4 + 2 \times 5$

Généralisation

Posons $P(x) = \sum\limits_{k \leqslant n} p_k x^k$, $Q(x) = \sum\limits_{k<n} q_k x^k$ et a une racine de P.
D'après le raisonnement précédent, on peut écrire :

$$\begin{cases} q_{n-1} = p_n & \\ q_k = p_{k+1} + a q_{k+1} & \forall 0 \leqslant k < n \end{cases}$$

Schématisation

On schématise l'algorithme de HÖRNER à l'aide d'un tableau :

$$\begin{tikzcd}
p_n \arrow[d] & p_{n-1} \arrow[d, "="] & p_{n-2} \arrow[d, "="] & \cdots & p_1 & p_0 \arrow[d, "="] \\
q_{n-1} \arrow[ur, dash, "\times a+"] & q_{n-2} \arrow[ur, dash, "\times a+"] & q_{n-3} & \cdots & q_0 \arrow[ur, dash, "\times a+"] & 0
\end{tikzcd}$$

Application

Soit :

$$P(x) = 3x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 2x - 2.$$

Une racine de P est $a = 1$ d'où :

$$\begin{tikzcd}
3 \arrow[d] & -4 \arrow[d, "="] & 8 \arrow[d, "="] & -3 \arrow[d, "="] & -2 \arrow[d, "="] & -2 \arrow[d, "="] \\
3 \arrow[ur, dash, "\times 1+"] & -1 \arrow[ur, dash, "\times 1+"] & 7 \arrow[ur, dash, "\times 1+"] & 4 \arrow[ur, dash, "\times 1+"] & 2 \arrow[ur, dash, "\times 1+"] & 0
\end{tikzcd}$$

D'où :

$$P(x) = (x-1)(3x^4 - x^3 + 7x^2 + 4x + 2).$$

Algorithme

Algorithme 1: Méthode de Hörner

Entrées
```
Nombre entier n (degré du polynôme P)
Liste P (coefficients dans le polynôme P)
Nombre réel a (racine du polynôme P)
```
Traitement
```
P[n]→Q[n-1]
```
Pour i allant de n-2 à 0
```
    P[i+1]+a*Q[i+1]→Q[i]
```
Fin du Pour

Sortie
```
Afficher Q
```

Programme Python

```
n = int(input("Degré du polynôme : "))
a = float(input("Racine du polynôme : "))
p = (n+1)*[0]
for i in range(0,n+1):
    print("Coefficient de x^",i," : ")
    p[i]=float(input());

q = n*[0]
q[n-1] = p[n]
j = n-2
while j > -1:
    q[j] = p[j+1]+a*q[j+1]
    j=j-1

for i in range(0,n):
    print("Coefficient de x^",i," : ",q[i],end='\n')
```