Équations différentielles

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 6 mai 2021

(https://courspasquet.fr) (https://mathweb.fr)

$y' = ay$

a est un réel.

$$\boxed{y' = ay \iff y(x) = C\mathrm{e}^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Pour déterminer la valeur de C, il faut nécessairement une condition sur la fonction y (connaître une image).

Exemple : trouver la fonction y telle que $y' = 3y$ avec $y(0) = 2$.

$$y' = 3y \iff y(x) = C\mathrm{e}^{3x} \quad \text{avec} \quad y(0) = 2 \iff C\mathrm{e}^{3\times 0} = 2 \iff C = 2.$$

Donc la fonction est $\boxed{y(x) = 2\mathrm{e}^{3x}}$.

$y' = ay + b$

a est un réel.

$$\boxed{y' = ay + b \iff y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Exemple : résoudre l'équation $y' = -2y + 3$.

$$y' = -2y + 3 \iff y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{-2} \iff \boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}, \quad C \in \mathbb{R}}.$$

$y' = ay + f$

f est une fonction, a est un réel.

$$\boxed{y' = ay + f \iff y(x) = C\mathrm{e}^{ax} + u(x), \quad C \in \mathbb{R}, \quad u \text{ solution particulière de l'équation différentielle}}$$

Exemple : résoudre l'équation différentielle $y' = 3y + x^2$.

— **Solution particulière :** u doit être un polynôme de degré 2 maximum (même nature que $f(x)$).
On pose alors $u(x) = ax^2 + bx + c$ et $u'(x) = 2ax + b$.

$$\begin{aligned} u'(x) - 3u(x) = x^2 &\iff (2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = x^2 \\ &\iff -3ax^2 + (2a - 3b)x + (b - 3c) = x^2 \\ &\iff \begin{cases} -3a = 1 \\ 2a - 3b = 0 \\ b - 3c = 0 \end{cases} \\ &\iff a = -\frac{1}{3}, \quad b = -\frac{2}{9}, \quad c = -\frac{2}{27}. \end{aligned}$$

Donc $u(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}$.

— **Solution de l'équation différentielle :**

$$\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}, \quad C \in \mathbb{R}}$$