Sujet d'entraînement

à l'épreuve du baccalauréat Mathématiques 2025

Enseignement de spécialité

Avertissement

Ce sujet n'a que pour unique but de réviser l'ensemble des notions les plus importantes du programme de mathématiques.
Il ne se veut en aucun cas un modèle possible pour le sujet à venir.

S'il n'y a pas de correction, c'est que je n'ai pas le temps de l'écrire.
Dans ce cas, je vous encourage à solliciter votre enseignant(e).

Exercice 1.

Un élu local souhaite connaître l'avis de ses administrés à l'aide d'un sondage.

- 42 % des personnes interrogées ont voté pour lui au premier tour des élections municipales ; parmi elles, 87 % sont satisfaites des mesures prises depuis son élection.
- Parmi les personnes n'ayant pas voté pour l'élu, 68 % ne sont pas satisfaites des mesures prises depuis son élection.

Partie A

On choisit au hasard une personne parmi les administrées de l'élu.
On note :

- V l'événement : « La personne a voté pour l'élu au premier tour »
- S l'événement : « La personne est satisfaite des mesures prises depuis l'élection de l'élu »

1. Montrer que la probabilité que la personne soit satisfaite des mesures prises par l'élu depuis on élection est égale à 0,551.

2. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait voté pour cet élu au premier tour sachant qu'elle n'est pas satisfaite des mesures prises depuis son élection.

3. On interroge n personnes parmi les administrés de l'élu. On suppose que le nombre d'administrés est suffisamment important pour assimiler le choix des n personnes à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 40 administrés, associe le nombre de personnes satisfaites des mesures prises par l'élu.

(a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité qu'il y ait au moins une personne mécontente des mesures prises soit supérieure ou égale à 0,99.

4. On prend dans cette question $n = 40$.

(a) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 30 personnes satisfaites des mesures prises par l'élu.

(b) Justifier que la probabilité qu'il y ait entre 18 et 27 personnes satisfaites par les mesures prises par l'élu est supérieure à 0,6.

Partie B

Les administrés de l'élu sont classés en trois catégories différentes, notées A, B et C.
On constitue un groupe de 12 personnes prises au hasard sur un total de 30 administrés qui ont bien voulu se réunir. Parmi elles,

- 3 sont de la catégorie A
- 5 sont de la catégorie B
- 4 sont de la catégorie C

1. Combien de groupes peut-on constituer ?

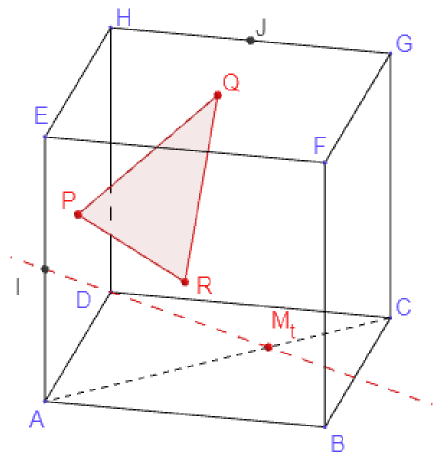
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait une seule personne de la catégorie A et deux personnes de la catégorie C ?

Exercice 2.

On considère un cube $ABCDEFGH$. Soit I le milieu de $[AE]$.
On note M_t le point de la droite (AC) tel que :

$$\overrightarrow{AM_t} = t\overrightarrow{AC}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

On note P, Q et R les centres respectifs des faces $(AEDH)$, $(EFGH)$ et $(ABFE)$.
On se rapporte au repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner les coordonnées des points I, J, P, Q et R.

2. Exprimer en fonction de t les coordonnées de M_t.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite (IM_t).

4. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est :

$$x + y - z = 0.$$

5. Montrer que (IM_t) est orthogonale au plan (PQR) pour $t = \dfrac{1}{2}$.

Dans ce qui suit, on prendra $t = \dfrac{1}{2}$, et on notera M le point M_t pour cette valeur.

6. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (IM) et du plan (PQR).

7. Justifier que le triangle PQR est équilatéral.
En déduire le volume du tétraèdre $PQRM$.

Exercice 3.

Partie A

Pour tout réel x, on pose :

$$f(x) = \ln(1-x) + x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right).$$

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$, puis montrer que pour tout réel x, $f(x) \leqslant 0$.

2. **(a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

(b) Montrer que $g'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)(x+1)^2}$.

(c) En déduire que pour tout réel x, $g(x) \geqslant 0$.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Exprimer $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de n.

2. **(a)** Montrer que pour tout entier k non nul,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}.$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$H_n \geqslant \ln(n+1).$$

(c) En déduire la limite de H_n quand n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = H_n - \ln(n+1) \qquad , \qquad v_n = H_n - \ln(n) \qquad \text{et} \qquad w_n = v_n - u_n.$$

(a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = g(n)$, puis que (u_n) est croissante.

(b) Montrer que $v_{n+1} - v_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right)$, puis que (v_n) est décroissante.

(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_n) = 0$.

(d) Montrer que (w_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$.

(e) Montrer alors que (v_n) converge.

Exercice 4.

Dans cet exercice, quatre propositions vous sont proposées.
Dire si elles sont *vraies* ou *fausses*, en justifiant vos réponses.

1. **Proposition 1.**

   L'espace est rapporté au repère $\left(\text{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$.
   On considère le point $\text{A}(-1\,;2\,;-1)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne :

   $$3x+4y-12z+20=0.$$

   Alors, la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à 1.

2. **Proposition 2.**

   L'équation différentielle $y'+3y=x$ admet pour solutions les fonctions :

   $$f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+C\mathrm{e}^{3x}\quad,\quad C\in\mathbb{R}.$$

3. **Proposition 3.**

   Le programme suivant, écrit en Python,

```python
S = 0
u = 1

for n in range(100):
    u = 2*u - 1
    S = S + u

print(S)
```

   affiche la valeur : « 100 ».

4. **Proposition 4.**

   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x)=\mathrm{e}^x+\ln x.$$

   La courbe représentative de f admet un unique point d'inflexion dont l'abscisse est $[0\,;1]$.